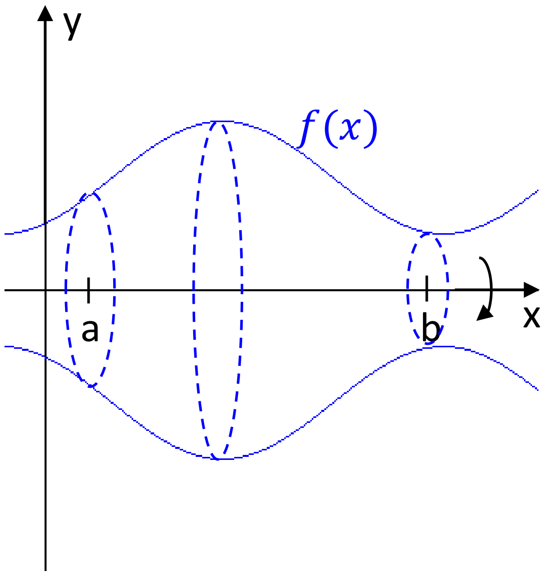
Integrale - Rotationskörper

Lässt man den Graphen einer Funktion $f(x)$ um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper, dessen Volumen man in einem vorgegeben Intervall $[a; b]$ bestimmen kann.



$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Rechenbeispiel 1

Berechne V_x im Intervall $[0; 2]$ für $f(x) = x^2$.

Lösung V_x:

$$\underline{V_x} = \pi \int_0^2 (x^2)^2 \, dx = \pi \left[\frac{1}{5} x^5\right]_0^2 = \underline{\frac{32}{5} \pi}$$

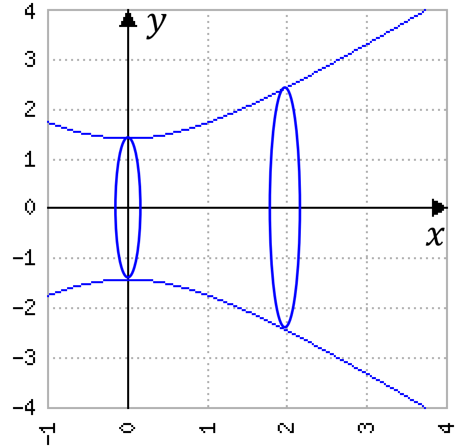
Rechenbeispiel 2

Für $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ berechne V_x im Intervall [0; 2].

Lösung V_x:

$$\underline{V_x} = \pi \int_0^2 \left(\sqrt{x^2+2}\right)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^2+2)\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + 2\mathrm{x}\right]_0^2 = \pi \left[\frac{8}{3} + 4\right] = \underline{\frac{20}{3}\pi}$$



Wahlteil 2005 – Analysis I 2c)

Rotationskörper: $f_t(x) = t \cdot \cos x; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Das Schaubild von f_t schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Drehkörper. Berechnen Sie dessen Volumen in Abhängigkeit von t.

Lösung:

Dieses Integral kann nur mit dem GTR berechnet werden. Die erforderliche Integrationstechnik wird in der Schule nicht mehr unterrichtet!

$$\underline{V(t)} = \pi \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (t \cdot \cos x)^2 \, dx = \pi \cdot t^2 \boxed{\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 \, dx} \approx \underline{1{,}57 \cdot \pi \cdot t^2}$$

Rotation um parallele Achsen

Wie berechnet man das Volumen eines Rotationskörpers, der um eine Parallele zur x- oder y-Achse rotiert?

Lösung:

- Verschiebe $f(x)$ so, dass die neue Funktion $g(x)$ um die x-Achse bzw. um die y-Achse rotiert.
- Berechne V_x bzw. V_y mit den bekannten Formeln.
- Die Berechnungen sind meist sehr aufwändig. Entsprechend selten kommt diese Aufgabenstellung im Abitur vor.